Tema 1: Relatividad Especial

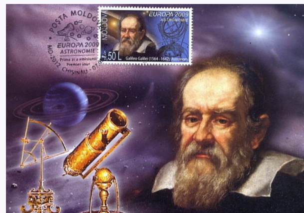
Geometría y Relatividad
Grado en Matemáticas
Curso 2022-2023

Profesor Miguel Ángel Javaloyes
Departamento de Matemáticas
Universidad de Murcia



23 de Enero de 2023

Sistemas inerciales



- El concepto de inercia se lo debemos a Galileo Galilei (1564-1642).
- En su obra "Diálogos sobre los dos grandes sistemas del mundo, ptolemaico y copernicano" (1632) introduce el concepto de fuerza como la causa de modificación del movimiento.
  - Hasta ese momento prevalecía el concepto aristotélico de que los objetos tendían a pararse a medida que perdían el impulso.
  - Galileo demostró mediante algunos experimentos que una esfera que se echase a rodar por una superficie plana perdía velocidad a causa del rozamiento.
  - Llegó a la conclusión de que si no se ejercía ninguna fuerza sobre un cuerpo, éste seguiría una trayectoria rectilinea uniforme.
  - Por tanto, distinguió una clase de sistemas de referencia llamados inerciales o galileanos en los que las leyes físicas tomaban la forma más simple posible.
  - Dichos sistemas inerciales son indistinguibles: no se puede saber si se está en reposo o en movimiento.

Sistemas inerciales: Transformaciones de Galileo

- Además se suponía que el tiempo era común para todos esos sistemas.
- Si tenemos dos sistemas inerciales I e I' e I' se mueve con respecto a I con velocidad v, podemos obtener la relación entre las coordenadas de ambos.
- Por simplicidad, elegimos un sistema de coordenadas cuyo eje x es paralelo a la recta sobre la que se mueve I'.
- Entonces si (t, x, y, z) son las coordenadas en I y (t', x', y', z') son las coordenadas en I', se tiene que

$$\begin{cases} t' &= t \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases}$$

Leyes del movimiento de Newton

Formuladas por Sir Isaac Newton (1643-1727) en 1687 en el "Philosophiæ naturalis principia mathematica":



- Primera ley: Todo cuerpo continúa en su estado de reposo o movimiento uniforme en línea recta, no muy lejos de las fuerzas impresas a cambiar su posición (ley de inercia de Galileo).
- Segunda ley: El cambio de movimiento es directamente proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime ($F = ma$).
- Tercera ley: Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria: quiere decir que las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en sentido opuesto.

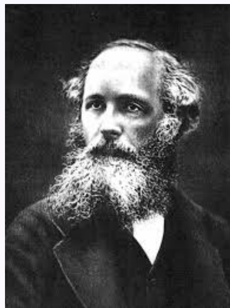
Ecuaciones de Maxwell

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0},$	Ley de Gauss
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$	Ley de Gauss para el campo magnético
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t},$	Ley de Faraday
$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t},$	Ley de Ampère generalizada

donde

- $\vec{E}$ es el campo eléctrico, $\vec{B}$ el campo magnético,
- ρ la densidad de carga eléctrica,
- ε_0 la permisibilidad eléctrica en el vacío (constante),
- $\vec{J}$ es la densidad de corriente,
- μ_0 es la permeabilidad magnética (constante),
- $\vec{\nabla} \cdot = div$ y $divF = \frac{\partial F^1}{\partial x} + \frac{\partial F^2}{\partial y} + \frac{\partial F^3}{\partial z}$ con $F = (F^1, F^2, F^3)$,
- $\vec{\nabla} \times = rot$ y $rotF = (\frac{\partial F^3}{\partial y} - \frac{\partial F^2}{\partial z}, \frac{\partial F^1}{\partial z} - \frac{\partial F^3}{\partial x}, \frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y})$.

Experimento de Michelson-Morley

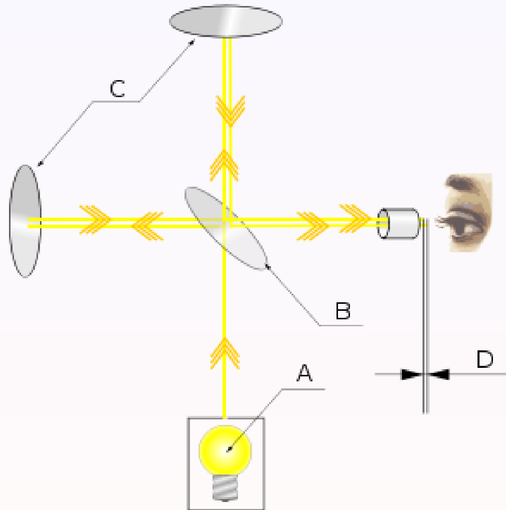


- Huygens (1629-1695) había desarrollado la teoría ondulatoria de la luz.
- En el siglo XIX, después de desarrollar su teoría, el escocés James Clerk Maxwell (1831 - 1879) se dio cuenta en 1862 que la luz debía ser producida por ondas electromagnéticas.
- De hecho, de las ecuaciones de Maxwell se deduce fácilmente que tanto $\vec{E}$ como $\vec{B}$ satisfacen la ecuación de ondas.
- Calculó la velocidad de éstas y el valor que obtuvo era muy parecido al valor de la velocidad de la luz.
  - El gran problema era como explicar que esas ondas se transmitían en el vacío.
  - La respuesta fue que existía un éter, esto es, no existía vacío.

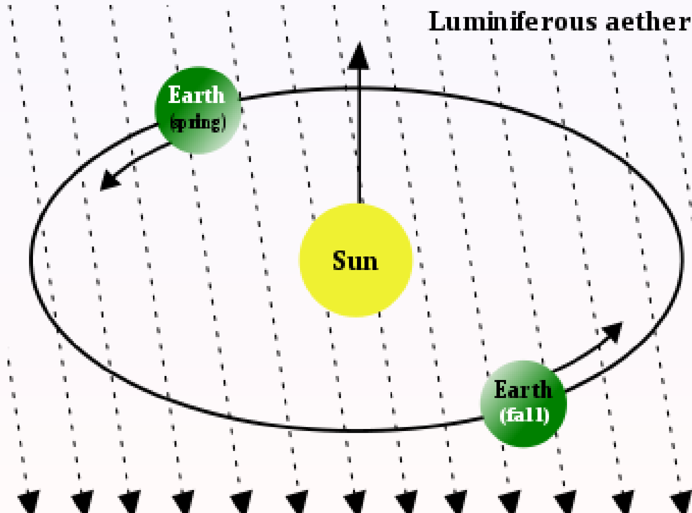
Más información en
Tema 8 de http://www.ugr.es/ jillana/SR/sr.pdf

Experimento de Michelson-Morley

- En 1887, Michelson y Morley realizaron un experimento para medir el efecto del viento del éter



- El resultado fue negativo, no se detectó el arrastre del viento.
- Además, parecía que la velocidad de la luz era la misma tanto si se viaja en el sentido de la órbita de la tierra como si se hace en sentido opuesto.



Reacciones al Experimento de Michelson-Morley

Los resultados negativos llevaron a un callejón sin salida para el que se propusieron varias vías de escape:

- Teoría de Emisión: la velocidad de la luz no era fija con respecto al éter y dependía de la fuente emisora. Entra en contradicción con la teoría ondulatoria y la luz proveniente de estrellas dobles.
- Hipótesis de arrastre del éter: la tierra arrastra una especie de costra del éter que se mueve solidaria con ella. Entra en contradicción con la aberración estelar.
- La contracción de Lorentz-Fitzgerald: los cuerpos se contraen en la dirección del movimiento

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

  Es una hipótesis que parece impuesta ad hoc y que parece difícil de contrastar.

Más información en Tema 1 de http://www.ugr.es/ jillana/SR/sr.pdf y https://gravitacion.es/el-experimento-de-michelson-morley/

Postulados de la Relatividad Especial

- Primer Postulado (principio de relatividad): La observación de un fenómeno físico por más de un observador inercial debe resultar en un acuerdo entre los observadores sobre la naturaleza de la realidad (las leyes del universo son las mismas sin que importe el sistema de referencia inercial).
- Segundo Postulado (invariabilidad de c): La Luz siempre se propaga en el vacío con una velocidad constante c que es independiente del estado de movimiento del cuerpo emisor y del estado de movimiento del observador.

En realidad, para deducir las transformaciones de Lorentz hace falta un poco más, esto es, hay que suponer que el espacio-tiempo es isotrópico en sus coordenadas espaciales.

Electromagnetismo y sistemas inerciales

- Uno de los motivos que llevaron a Einstein a considerar que la velocidad de la luz es constante es que su velocidad como onda no parecía depender del sistema de referencia.
- De hecho en el artículo de 1905 "On the electrodynamics of moving bodies" considera un imán y un conductor y estudia qué pasa cuando uno se mueve en relación al otro y viceversa.
- Cuando el imán se mueve genera un campo eléctrico que provoca una corriente en el conductor en reposo.
- Pero si es el conductor el que se mueve, la fuerza magnética del imán provoca un corriente de la misma intensidad en el conductor.
- Esto según Einstein era una asimetría que no parecía razonable, y que parecía indicar que no existía reposo absoluto.
- Junto con el hecho de que no se detectase el éter, le llevó a enunciar el segundo postulado de la invariabilidad de c.

Más información en https://gravitacion.es/en-busca-del-eter-luminifero/

Consecuencias de los Postulados: ¿Se ven afectadas las direcciones ortogonales al movimiento?

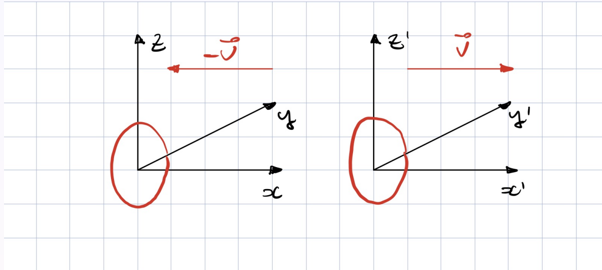
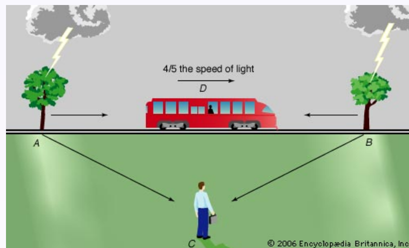


IMAGEN: José Antonio Pastor - https://gravitacion.es/las-transformaciones-de-lorentz/

- Imaginemos dos anillos cuyo centro está sobre la misma recta y uno se mueve a velocidad constante respecto al otro a lo largo de dicha recta.
- Por simetría, ambos anillos tienen que ser círculos del mismo radio en ambos sistemas inerciales.
- Conclusión: las longitudes ortogonales al movimiento coinciden en ambos sistemas inerciales.

Consecuencias de los Postulados: La simultaneidad es relativa



- Dos eventos no pueden ser simultáneos para dos observadores inerciales, pues si lo fuesen llegaríamos a una contradicción.
- Supongamos que los rayos son simultáneos para el observador solidario con los árboles y el autobús pasa por el punto medio de los árboles cuando se cruzan los rayos.
- Cuando los rayos de luz parten de los árboles, el autobús no ha llegado al centro.
- Por tanto, el rayo de la derecha recorre más distancia, lo que implica que el rayo de la derecha llegó al árbol antes que el de la izquierda para el observador autobús.

Consecuencias de los Postulados: la dilatación del tiempo

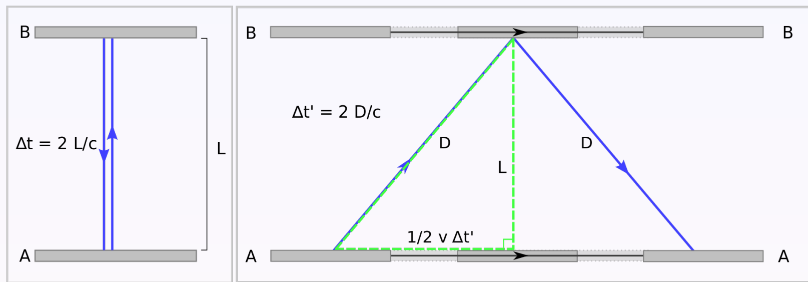


IMAGEN: By Sacamol - Own work, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=48778704

Observemos que el sistema inercial de la derecha se mueve con velocidad v hacia la izquierda y los cálculos se hacen en el espacio de reposo del otro sistema, esto es, $x = 0$.

Tenemos que $\Delta t = 2L/c$, $\Delta t' = 2D/c$ y $\sqrt{L^2 + \left(\frac{v\Delta t'}{2}\right)^2} = D$, de donde

$$\Delta t' = \gamma(v)\Delta t, \quad \text{donde } \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Si fijamos $x' = 0$, obtenemos $\Delta t = \gamma(v)\Delta t'$ (pues $\gamma(-v) = \gamma(v)$).

Consecuencias de los Postulados: la contracción de longitudes

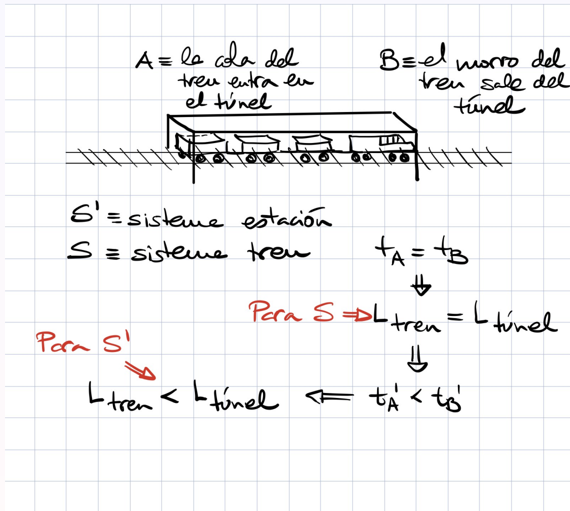


IMAGEN: José Antonio Pastor - https://gravitacion.es/la-contraccion-de-longitudes/

Transformaciones de Lorentz

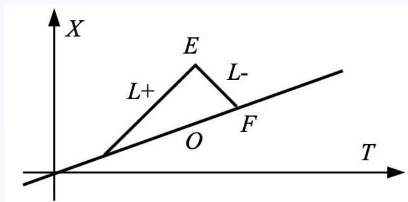


IMAGEN: Alan Macdonald http://www.faculty.luther.edu/ macdonal/LorentzT.pdf

- O es la recta $x' = 0$ y sobre esa recta se tiene que $x = vt$.
- Sabemos que en $x' = 0$ se tiene $t = \gamma(v)t'$ con $\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, pues aquí $\Delta t = t_1 - t_0 = t_1$ y $\Delta t' = t'_1 - t'_0 = t'_1$ y escogemos $t_0 = t'_0 = 0$ (teniendo en cuenta la dilatación del tiempo).
- Entonces, a lo largo de O

$$ct + x = \gamma(v)(1 + \frac{v}{c})(ct' + x'),$$
$$ct - x = \gamma(v)(1 - \frac{v}{c})(ct' - x').$$

- Dichas ecuaciones se mantienen a lo largo de rayos de luz, y por lo tanto, (ver dibujo) en cualquier punto E.

Transformaciones de Lorentz

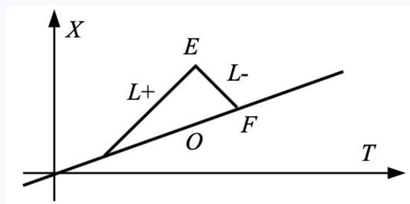


IMAGEN: Alan Macdonald http://www.faculty.luther.edu/ macdonal/LorentzT.pdf

- De hecho, los rayos de luz satisfacen que $\frac{dx}{dt} = \pm c$ y $\frac{dx'}{dt'} = \pm c$.
- Eso quiere decir que su trayectoria satisface $x = \pm ct + k_1$ y $x' = \pm ct' + k_2$, para ciertas constantes k_1 y k_2.
- Como $L-$ retrocede en x, satisface que $x + ct = k_1$ y $x' + ct' = k_2$.
- Como $L+$ avanza en x, satisface que $x - ct = \tilde{k}_1$ y $x' - ct' = \tilde{k}_2$.
- Por tanto,

$$ct + x = \gamma(v)(1 + \frac{v}{c})(ct' + x'),$$
$$ct - x = \gamma(v)(1 - \frac{v}{c})(ct' - x'),$$

son válidas en E, y por tanto, en todo punto.

Transformaciones de Lorentz

Sumando y restando las ecuaciones, obtenemos

$$t = \gamma(v)\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right),$$
$$x = \gamma(v)(x' + vt'),$$

que son equivalentes a

$$t' = \gamma(v)\left(t - \frac{v}{c^2}x\right),$$
$$x' = \gamma(v)(x - vt).$$

Además, se puede comprobar que $-c^2(t')^2 + (x')^2 = -c^2t^2 + x^2$. Como $y = y'$ y $z = z'$ (las direcciones ortogonales no cambian la longitud):

$$-c^2(t')^2 + (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2.$$

Dicha cantidad invariante es lo que se llama el intervalo espacio-temporal.

El intervalo espacio-temporal como nueva forma de medir

- A partir de ahora vamos a usar unidades geométricas.
- Eso quiere decir que la velocidad de la luz será siempre igual a 1, esto es, en dichas unidades $c = 1$, y el espacio se mide en tiempo (el tiempo que tarda la luz en recorrerlo).
- Por tanto, la velocidad es adimensional.
- Entonces

$$-(t')^2 + (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = -t^2 + x^2 + y^2 + z^2.$$

- Si consideramos el observador O' en reposo ($x' = y' = z' = 0$), el tiempo que mide será

$$t' = \sqrt{-(-t^2 + x^2 + y^2 + z^2)}.$$

El intervalo espacio-temporal como nueva forma de medir

- Parece natural definir

$$\langle (t_1, x_1, y_1, z_1), (t_2, x_2, y_2, z_2) \rangle_1 = -t_1 t_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

- El observador en movimiento con $x' = 0$ satisface que $x = vt$ y su espacio de reposo $t' = 0$, $t = vx$. Por tanto,

$$\langle (t, vt, 0, 0), (vx, x, y, z) \rangle_1 = 0.$$

- Esto significa que la dirección del observador en movimiento es "ortogonal" a su espacio de reposo.
- Además en el espacio de reposo podemos usar la métrica Euclidea.
- Aunque parezca que estemos multiplicando coordenadas, en realidad son los vectores directores de las rectas, pues consideramos rectas que pasan por el origen.
- Se podría escribir lo mismo usando incrementos $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ y un espacio afín.

El intervalo espacio-temporal como nueva forma de medir

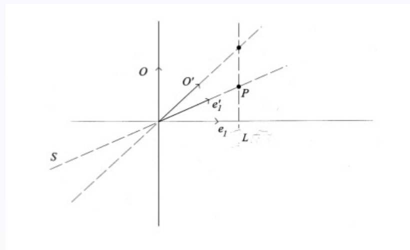
- En definitiva, toda la información de las transformaciones de Lorentz está condensada en $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$.
- Los observadores inerciales están determinados por las direcciones (t, x, y, z) tales que

$$(x^2 + y^2 + z^2)/t^2 < c^2 = 1,$$

  de manera que $-t^2 + x^2 + y^2 + z^2 < 0$ (la dirección (t, x, y, z) es temporal).
- El espacio de reposo del observador inercial (t, x, y, z) está formado por los vectores $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$-ortogonales a (t, x, y, z).
- El tiempo propio del observador (t, x, y, z) es

$$t' = \sqrt{-(-t^2 + x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Revisitando la contracción de longitudes

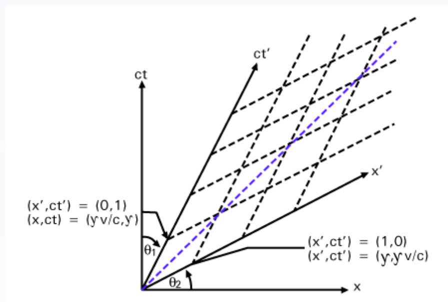


El suceso P tiene coordenadas (T, L) para O, y $(0, L')$ para O'. Además:

$$T = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} vL', \quad L = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} L'$$

por tanto, $L' = \sqrt{1-v^2}L$. Esto indica que O' observará una contracción de la longitud en la dirección del movimiento en relación a lo que mide O en reposo.

Revisitando la contracción de longitudes



Producto escalar: propiedades básicas

Definición

Sea $b : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Entonces b se dice

- *definida positiva* si $b(v, v) > 0 \ \forall \ v \in V \setminus \{0\}$,
- *semidefinida positiva (resp. negativa)* si $b(v, v) \geq 0$ (resp. $b(v, v) \leq 0$) $\forall \ v \in V \setminus \{0\}$,
- *definida* si es semidef. positiva o semidef. negativa e *indefinida* en caso contrario,
- *no-degenerada* si la condición $b(v, w) = 0 \ \forall \ w \in V$ implica que $v = 0$. En caso contrario, es *degenerada*, y $N = \{v \in V : b(v, w) = 0, \forall w \in V\}$ es el *radical* de b.

Además, dado $v \in V$, $q_b(v) = b(v, v)$, decimos que v es

- *temporal* si $q_b(v) < 0$,
- *luminoso* si $q_b(v) = 0$ y $v \neq 0$,
- *espacial* si $q_b(v) > 0$,
- *causal* si v es temporal o luminoso.

Para esta parte usaré tanto O'Neill como

"Introduction to Lorentzian Geometry and its Applications" M. A. J. y Miguel Sánchez, 2010. En adelante, JS10.

Producto escalar: propiedades básicas

Definición

Un *producto escalar* g en V es una forma bilineal simétrica no-degenerada. Dado $v \in V$, denotaremos $|v| = \sqrt{|g(v,v)|}$ siempre que esté claro cual es el producto escalar g que estamos usando.

- Dados $v, w \in V$, entonces $v \perp w$ (v y w son *ortogonales*) si $g(v,w) = 0$.
- $A, B \subseteq V$, A es *ortogonal* a B, $A \perp B$, si $v \perp w$ $\forall v \in A$ y $\forall w \in B$.
- $A^{\perp} = \{w \in V : g(v,w) = 0, \forall v \in A\}$.
- una base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ de V se dice *ortonormal* si $|e_i| = 1$, $g(e_i, e_j) = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$.

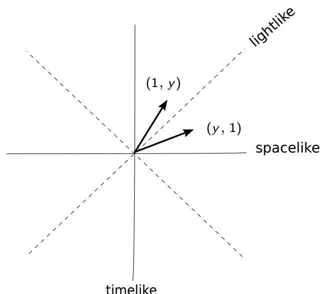


Figura: Dos vectores ortogonales en $\mathbb{R}^2$ con $g((t,x),(t',x')) = -tt' + xx'$.

Producto escalar: propiedades básicas

Lema (Lema 1.9 de JS10)

El número ν de vectores temporales en una base ortonormal B de (V, g) no depende de la base, sino sólo de (V, g). A ν se le llama el índice de (V, g).

Definición

Un subespacio vectorial $W < V$ se dice *no-degenerado* en (V, g) si $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ (o, equiv., si $g_W = g|_{W \times W}$ es no-degenerado).

Proposición (Lema 2.22+2.23 de O'Neill y Prop. 1.13 de JS10)

Si $W < V$, entonces

(I) $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$,

(II) $(W^{\perp})^{\perp} = W$,

(III) $V = W + W^{\perp} \Leftrightarrow W$ *es no-degenerado* ($\Leftrightarrow W^{\perp}$ *es no-deg.*).

Producto escalar: propiedades básicas

Teorema (Teo. 1.14 de JS10)

(V, g) admite una base ortonormal.

Lema (Lema 2.25 de O'Neill)

Dada una base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ de un producto escalar (V, g) y un vector $v \in V$, se tiene que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(v, e_i) e_i,$$

donde $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$ para $i = 1, \ldots, n$.

Definición

Un producto escalar g se dice

- *Euclideo* si $\nu = 0$,
- *Lorentziano* si $\nu = 1$ y $n \geq 2$.
- e *indefinido* si lo es como forma bilineal simétrica.

Producto escalar: propiedades básicas

Ejemplo

En $\mathbb{R}^n$ definimos el producto escalar usual de índice ν, $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu$, como

$$\langle (a^1, \ldots, a^n), (b^1, \ldots, b^n) \rangle_\nu = -\sum_{i=1}^{\nu} a^i b^i + \sum_{i=\nu+1}^{n} a^i b^i .$$

Ejercicio 1: Prueba que si b es un producto escalar indefinido, entonces existe una base de vectores temporales, otra de vectores luminosos y otra de vectores espaciales.

Espacios vectoriales Lorentzianos: conos temporales

Proposición (Prop. 1.34 de JS10)

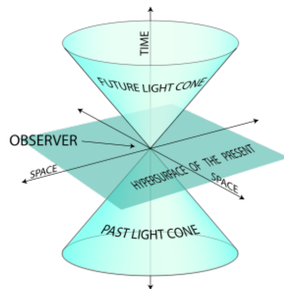
El conjunto de los vectores temporales de un espacio vectorial Lorentziano (resp., causales; luminosos si $n > 2$) tiene dos partes conexas. A cada una de esas partes la llamaremos cono temporal, *(resp.* cono causal*;* cono luminoso*).*

Definición

Una *orientación temporal* es una elección de uno de los dos conos temporales. Al cono elegido lo llamaremos *cono futuro*, y al otro, *cono pasado*.

Proposición (Lema 2.29 de O'Neill y Prop. 1.36 de JS10)

Dos vectores temporales v y w están en el mismo cono temporal si y sólo si $g(v, w) < 0$.



Espacios vectoriales Lorentzianos: conos temporales

Proposición (Prop. 1.37 de JS10)

Si v, w son vectores temporales en el mismo cono, entonces $av + bw$ también es un vector del mismo cono para cualesquiera $a, b > 0$. En particular, cada cono temporal es convexo.

Demostración

Sabemos que $g(v, w) < 0$, y entonces

$$g(v, av + bw) = ag(v, v) + bg(v, w) < 0,$$
$$g(av + bw, av + bw) = a^2 g(v, v) + b^2 g(w, w) + 2abg(v, w) < 0.$$

Ejercicio 2: Supongamos que (V, g) es un espacio Lorentziano. Prueba las siguientes afirmaciones:

1. Si $u, v \in V$ son dos vectores causales linealmente independientes, entonces u y v están en el mismo cono si y sólo $g(u, v) < 0$.
2. Dados dos vectores causales $u, v \in V$, entonces $g(u, v) \neq 0$ a menos de que u y v sean ambos luminosos y linealmente dependientes.
3. Los conos causales con convexos.

Desigualdades reversas

Teorema (Desigualdad de Cauchy-Schwarz reversa, Prop. 5.30 de O'Neill y Teo. 1.38 de JS10)

Si $v, w \in V$ *son vectores temporales, entonces*

- $|g(v,w)| \geq |v||w|$, *y la igualdad se tiene sii* v, w *son colineales.*
- *Si* v *y* w *están en el mismo cono, entonces* $\exists! \ \varphi \geq 0$, *llamado el* *Ángulo hiperbólico* *entre* v *y* w *tal que*

$$g(v,w) = -|v||w| \cosh(\varphi).$$

Teorema (Desigualdad triangular reversa, Cor. 5.31 de O'Neill y Teo. 1.39 de JS10)

Si $v, w \in V$ *son vectores temporales en el mismo cono, entonces*

$$|v| + |w| \leq |v + w|,$$

y la igualdad se tiene si y sólo si v, w *son colineales.*

Subespacios

Definición

Sea (V, g) un espacio vectorial Lorentziano. Diremos que un subespacio de V, $W < V$ es

- *espacial*, si $g_{|W \times W}$ es Euclidea,
- *temporal*, si $g_{|W \times W}$ es no-degenerado con índice 1 (esto es, Lorentziano siempre que $\dim W \geq 2$),
- *luminoso*, si $g_{|W \times W}$ es degenerado, $(W \cap W^{\perp} \neq \{0\})$.

Proposición (Prop. 1.43 de JS10)

Un subespacio $W < V$ es temporal si y sólo si $W^{\perp}$ es espacial.

Lema (Prop 1.40 de JS10)

Sean u, v vectores luminosos, entonces:

$$\{u, v\} \text{ es linealmente dependiente} \Leftrightarrow g(u, v) = 0.$$

Además, dos vectores causales lin. indep. están en el mismo cono si y sólo si su producto es negativo.

Subespacios

Observación: cuando los dos vectores son temporales en la última equivalencia del Lema anterior no hace falta suponer que son lin. indep.

Proposición (Lema 5.27 de O'Neill y Prop. 1.44 de JS10)

Si $W < V$, *con* $\dim(W) \geq 2$, *las siguientes condiciones son equivalentes:*

(I) W *es temporal,*

(II) W *contiene dos vectores luminosos linealmente independientes,*

(III) W *contiene un vector temporal.*

Ejercicio 3: Si $W < V$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(I) W es luminoso.

(II) W contiene un vector luminoso, pero *no* uno temporal.

(III) La intersección de W con el subconjunto de vectores nulos (luminosos o cero) forma un subespacio de dimensión 1.

El grupo de Lorentz: las cuatro componentes conexas

Denotemos por $\mathbb{L}^n$ el espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski, esto es, $\mathbb{R}^n$ dotado de $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ y

$$\eta = \left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & I_{n-1} \end{array} \right).$$

Definición

Definimos el grupo de las transformaciones de Lorentz como

$$\mathrm{Iso}(\mathbb{L}^n) = \{ f : \mathbb{L}^n \longrightarrow \mathbb{L}^n \mid f \text{ es una isometría vectorial} \},$$

y el *grupo de Lorentz* como $O_1(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ A^t \eta A = \eta \}$, donde $M_n(\mathbb{R})$ son las matrices cuadradas de orden n con coeficientes en $\mathbb{R}$.

Podemos identificar las transformaciones de Lorentz con el grupo de Lorentz, puesto que si $f \in \mathrm{Iso}(\mathbb{L}^n)$ y A es la matriz asociada a f en la base canónica, entonces $A \in O_1(n)$ y la relación es biyectiva, pues

$$\langle f(v), f(w) \rangle_1 = (Av)^t \eta A w = v^t (A^t \eta A) w$$

y para que sea igual a $\langle v, w \rangle_1 = v^t \eta w$, necesariamente $A^t \eta A = \eta$. Así que tenemos una aplicación natural $\Phi : \mathrm{Iso}(\mathbb{L}^n) \to O_1(n)$ con $\Phi(f) = A_f$.

El grupo de Lorentz: las cuatro componentes conexas

La situación es análoga a lo que pasa con las isometrías euclideas, que se pueden obtener a partir de las matrices ortogonales. También se tiene que

$$\det A^t \eta A = \det \eta \Leftrightarrow \det A^2 = 1.$$

Se sigue inmediatamente que A es invertible. Además es fácil comprobar que su inversa también está en $O_1(n)$ y que la multiplicación de matrices en $O_1(n)$ se queda en $O_1(n)$, esto es, que $O_1(n)$ es un grupo con la multiplicación matricial.

Definición

Sea f una transformación de Lorentz. Entonces

- f es *propia* si $\det f (= \det A_f) = 1$,
- f es *impropia* en caso contrario, esto es, si $\det f (= \det A_f) = -1$,
- $\mathrm{Iso}^+(\mathbb{L}^n)$ = transformaciones de Lorentz propias; $O_1^+(n) := \Phi(\mathrm{Iso}^+(\mathbb{L}^n))$,
- $\mathrm{Iso}^-(\mathbb{L}^n)$ = transformaciones de Lorentz impropias; $O_1^-(n) := \Phi(\mathrm{Iso}^-(\mathbb{L}^n))$.

El grupo de Lorentz: las cuatro componentes conexas

A partir de aquí, denotaremos las bases ortonormales de un espacio Lorentziano como $e_0, \ldots, e_{n-1}$ usando el índice 0 para distinguir el vector temporal e_0 del resto.

Con la base usual $e_0, \ldots, e_{n-1}$ de $\mathbb{L}^n$, podemos fijar la orientación temporal estándar:

$$\begin{cases} \text{cono causal } \textit{Futuro} \quad C^{\uparrow} : \text{el que contiene a } e_0, \\ \text{cono causal } \textit{Pasado} \quad C^{\downarrow} : \text{el que contiene a } -e_0. \end{cases}$$

Observemos que tanto una isometría vectorial $f : \mathbb{L}^n \to \mathbb{L}^n$ como su inversa preservan el cono causal y por tanto $f(C^{\uparrow} \cup C^{\downarrow}) = C^{\uparrow} \cup C^{\downarrow}$. Además, como f es un homeomorfismo, lleva componentes conexas a componentes conexas, así que $f(C^{\uparrow}) = C^{\uparrow}$ ó $f(C^{\uparrow}) = C^{\downarrow}$.

Definición

- Diremos que f es *ortocrona* si $f(C^{\uparrow}) = C^{\uparrow}$.
- $\mathrm{Iso}^{\uparrow}(\mathbb{L}^n)$ = el subgrupo de transformaciones ortocronas.
- $O_1^{\uparrow}(n) = \Phi(\mathrm{Iso}^{\uparrow}(n))$.
- $\mathrm{Iso}^{\downarrow}(\mathbb{L}^n)$ = el subconjunto de transformaciones no-ortocronas.
- $O_1^{\downarrow}(n) = \Phi(\mathrm{Iso}^{\downarrow}(\mathbb{L}^n))$.

El grupo de Lorentz: las cuatro componentes conexas

- Combinaremos las notaciones de un modo obvio:

$$O_1^{+\downarrow}(n), O_1^{+\uparrow}(n), O_1^{-\downarrow}(n), O_1^{-\uparrow}(n).$$

  Éstas son de hecho las cuatro componentes de $O_1(n)$.
- Sin embargo usaremos la notación especial $SO_1^{\uparrow}(n)$ para el *grupo de Lorentz restringido*, esto es, el subgrupo de las transformaciones ortocronas propias.

Proposición (Prop. 1.53 de JS10)

Si $f \in \mathrm{Iso}(\mathbb{L}^n)$, *entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(I) $f \in \mathrm{Iso}^{\uparrow}(\mathbb{L}^n)$,

(II) $\exists$ *un vector causal* $v \in \mathbb{L}^n$ *tal que* $\langle v, f(v)\rangle_1 < 0$,

(III) $\forall$ *vector temporal* $v \in \mathbb{L}^n$, $\langle v, f(v)\rangle_1 < 0$,

(IV) *en cada base ortonormal, el elemento* $(0,0)$ *de la matriz de* f *es* ≥ 0 *(y, de hecho,* ≥ 1*).*

El grupo de Lorentz: las cuatro componentes conexas

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & I_{n-2} \end{array}\right) \in SO_1^{\uparrow}(n); \qquad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & I_{n-2} \end{array}\right) \in O_1^{-\downarrow}(n);$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & I_{n-2} \end{array}\right) \in O_1^{+\downarrow}(n); \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & I_{n-2} \end{array}\right) \in O_1^{-\uparrow}(n).$$

Las isometrías con determinante igual a 1: todas ellas admiten una base de autovectores luminosos y

$$SO_1^{\uparrow}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh\theta & \operatorname{senh}\theta \\ \operatorname{senh}\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\};\ O_1^{+\downarrow}(2) = \left\{ -A : A \in O_1^{+\uparrow}(2) \right\}.$$

Isometrías con determinante igual a -1: todas ellas admiten una base ortonormal de autovalores y

$$O_1^{-\uparrow}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh\theta & \operatorname{senh}\theta \\ -\operatorname{senh}\theta & -\cosh\theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\};\ O_1^{-\downarrow}(2) = \left\{ -A : A \in O_1^{-\uparrow}(2) \right\}.$$

Observemos que, a diferencia del caso Euclideo, todas estas matrices son diagonalizables.

Modelo Matemático de un espaciotiempo

Definición

Un espacio-tiempo físico en ausencia de gravedad o espaciotiempo en Relatividad Especial es un espacio afín lorentziano, (A, V, g), de dimensión 4 orientado temporalmente.

- A es el conjunto de puntos o "sucesos/eventos" del espacio afín,
- V el espacio vectorial director,
- y g la métrica de Lorentz, para la cual supondremos implícitamente que se ha prefijado una orientación temporal.

Modelo Matemático de un espaciotiempo

Definición

- Un observador instantáneo es un par (P, e_0), donde $P \in A$, y $e_0 \in V$ es un vector temporal unitario futuro.
- La trayectoria de un observador no acelerado (o en caída libre) es la recta afín $\{P + se_0 : s \in \mathbb{R}\}$, generada por cualquier observador instantáneo (P, e_0).
- Un sistema de referencia inercial O es el par formado por un observador instantáneo (P, e_0) y una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $e_0^{\perp}$ (o, equivalentemente, una referencia ortonormal afín de (A, V, g)).

Definición

Una trayectoria luminosa es una recta afín del tipo $L = \{P + su : s \in \mathbb{R}\}$, donde u es un vector luminoso futuro, y $P \in A$.

Modelo Matemático de un espaciotiempo

- Recordemos que fijando un punto $P_0 \in A$, el espacio afín A se puede identificar con V mediante

$$A \ni Q \to \vec{P_0Q} \in V.$$

- Por O y O' representaremos dos sistemas de referencia inerciales y, en general, supondremos por simplicidad que sus rectas afines pasan siempre por el punto común P_0, por lo que ambos observadores identifican del mismo modo A y V.
- Dado el vector de V, $v = te_0 + x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3$ (identificado con el punto $P_0 + v \in A$) llamaremos a (t, x^1, x^2, x^3) las coordenadas respecto a O de v (o indistintamente del punto $P_0 + v \in A$).
- Análogamente, $(t', (x^1)', (x^2)', (x^3)')$ son las coordenadas respecto a O' del vector $t'e_0' + (x^1)'e_1' + (x^2)'e_2' + (x^3)'e_3' \in V \equiv A$.

Definición

El espacio en reposo del sistema de referencia inercial O en el instante t_0 es el hiperplano afín de A de ecuación $t \equiv t_0$ en las coordenadas introducidas por O.

Modelo Matemático de un espaciotiempo

Definimos a continuación la trayectoria que mide O de O'. Para ello, se supone que físicamente O reparametriza con su coordenada temporal al observador no acelerado $\{se_0' | s \in \mathbb{R}\}$. Con más precisión: al tomar las coordenadas de e_0' en O tenemos:

$$e_0' = Te_0 + X^1 e_1 + X^2 e_2 + X^3 e_3 = T\left(e_0 + \frac{X^1}{T} e_1 + \frac{X^2}{T} e_2 + \frac{X^3}{T} e_3\right).$$

La trayectoria que mide O del observador O' es la curva en $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle_{\mathbb{R}} = e_0^{\perp} < V$:

$$t \to t\left(\frac{X^1}{T} e_1 + \frac{X^2}{T} e_2 + \frac{X^3}{T} e_3\right),$$

y la tri-velocidad que mide O del observador O' es su derivada:

$$\vec{v} = \frac{X^1}{T} e_1 + \frac{X^2}{T} e_2 + \frac{X^3}{T} e_3.$$

Como e'_0 es temporal unitario futuro, se tiene que

$$-1 = -T^2 + \sum_{i=1}^{3} (X_i)^2,$$

con lo cual $T \geq 1$, y por tanto

$$|\vec{v}|^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{X^i}{T} \right)^2 = 1 - \frac{1}{T^2} < 1.$$

Obsérvese además que, escribiendo $\vec{v} = v_x e_1 + v_y e_2 + v_z e_3$ y $v^2 = |\vec{v}|^2$, se tiene en las coordenadas de O:

$$e'_0 \equiv (\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v_x}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v_y}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v_z}{\sqrt{1-v^2}}).$$

Tiempo propio y paradoja de los gemelos

Definición

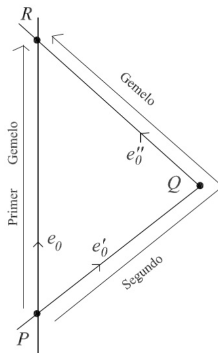
Diremos que una curva diferenciable a trozos $\gamma : [a, b] \to A$ es causal (resp. temporal, luminosa) orientada al futuro si γ' es causal (resp. temporal, luminoso) en todo instante y además está en el cono futuro.

- Vamos a definir un observador (no necesariamente inercial) como una curva temporal orientada al futuro.
- Decimos que γ está parametrizada por su tiempo propio si $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle_1 = -1$ para todo $s \in [a, b]$.
- El tiempo propio se interpreta como el tiempo transcurrido infinitesimalmente en un observador solidario con γ.
- El incremento de tiempo propio para γ es

$$\tau = \int_a^b \sqrt{- \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle_1} ds$$

y dicho incremento coincide con $b - a$ si γ está parametriada por el tiempo propio.

Tiempo propio y paradoja de los gemelos



- Como consecuencia de la desigualdad triangular reversa, el tiempo propio del camino recto de P a R es mayor que el que pasa por Q.
- La paradoja de los gemelos dice que un gemelo que pasase por Q al volver a R sería más joven que su hermano, que siguió la linea recta.
- ¿Hay realmente una paradoja? ¿Las situaciones son intercambiables?
- En realidad, no, porque hay uno que sigue una trayectoria inercial y el otro no.

Orden temporal y causal

Definición

Diremos que un evento Q está en el futuro causal $J^+(P)$ (resp. cronológico $I^+(P)$) de P si existe una curva causal (resp. temporal) que va de P a Q o $P = Q$ (esto último sólo para $J^+(P)$). De forma análoga, se definen el pasado causal $J^-(P)$ y cronológico $I^-(P)$.

- $Q \in I^+(P)$ se denota como $P \ll Q$ y $Q \in J^+(P)$, $P \leq Q$.
- Los puntos que están en el futuro causal de P son los eventos del espaciotiempo en los que puede influir P, y los del futuro cronológico, a donde se puede llegar desde P.
- Los puntos del pasado causal de P son los puntos que pueden influir en el evento P.
- ¿Puedes describir como es el futuro causal y el futuro cronológico de un evento P?

Proposición

Si $P \ll Q$, entonces $|\vec{PQ}|$ es el máximo de todas las longitudes de curvas temporales que conectan P y Q, y se alcanza solamente en la única recta temporal (salvo reparametrización) que conecta P y Q.

- Vamos a revisitar las transformaciones de Lorentz.
- Supongamos que e_0 y e_0' son los vectores directores de O y O' y sea $\Pi = \langle e_0, e_0' \rangle_{\mathbb{R}}$.
- Sean $B = (e_0, e_1)$ y $B' = (e_0', e_1')$ bases de Π positivamente orientadas.
- La matriz de cambio de base de B' a B pertenece a $O_1^{+\uparrow}(2)$ y por tanto tiene que ser de la forma

$$\begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \operatorname{senh}(\theta) \\ \operatorname{senh}(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix},$$

para algún $\theta \in \mathbb{R}$, teniéndose $e_0' = \cosh(\theta)e_0 + \operatorname{senh}(\theta)e_1$, y $e_1' = \operatorname{senh}\,(\theta)e_0 + \cosh(\theta)e_1$,
- además, $\vec{v} = \frac{\operatorname{senh}(\theta)}{\cosh(\theta)}e_1$, y $v = \operatorname{tgh}(\theta) \in (-1, 1)$, $\cosh(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ y $\operatorname{senh}(\theta) = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$,
- así que

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}.$$

Ley de adición de velocidades

Sean O_1, O_2, O_3 tres observadores, y B_1, B_2, B_3 sus bases ortonormales correspondientes (todas con la misma orientación). Denotaremos:

- v_{12} la velocidad que mide O_1 de O_2,
- v_{23} la velocidad que mide O_2 de O_3,
- v_{13} la velocidad que mide O_1 de O_3.

Nos planteamos el problema: conocidas v_{12} y v_{23}, ¿cuál es el valor de v_{13}? Sabemos que

$$v_{12} = \operatorname{tgh}(\theta_{12}), v_{23} = \operatorname{tgh}(\theta_{23}), v_{13} = \operatorname{tgh}(\theta_{13}).$$

Por tanto,

$$\text{cambio de } B_1 \text{ a } B_2 = \begin{pmatrix} \cosh(\theta_{12}) & \operatorname{senh}(\theta_{12}) \\ \operatorname{senh}(\theta_{12}) & \cosh(\theta_{12}) \end{pmatrix},$$

$$\text{cambio de } B_2 \text{ a } B_3 = \begin{pmatrix} \cosh(\theta_{23}) & \operatorname{senh}(\theta_{23}) \\ \operatorname{senh}(\theta_{23}) & \cosh(\theta_{23}) \end{pmatrix}.$$

Ley de adición de velocidades

$$\text{cambio de } B_1 \text{ a } B_3 = \begin{pmatrix} \cosh(\theta_{12}) & \operatorname{senh}(\theta_{12}) \\ \operatorname{senh}(\theta_{12}) & \cosh(\theta_{12}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(\theta_{23}) & \operatorname{senh}(\theta_{23}) \\ \operatorname{senh}(\theta_{23}) & \cosh(\theta_{23}) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cosh(\theta_{12}+\theta_{23}) & \operatorname{senh}(\theta_{12}+\theta_{23}) \\ \operatorname{senh}(\theta_{12}+\theta_{23}) & \cosh(\theta_{12}+\theta_{23}) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cosh(\theta_{13}) & \operatorname{senh}(\theta_{13}) \\ \operatorname{senh}(\theta_{13}) & \cosh(\theta_{13}) \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $\theta_{13} = \theta_{12} + \theta_{23}$ y

$$v_{13} = \operatorname{tgh}(\theta_{13}) = \operatorname{tgh}(\theta_{12}+\theta_{23}) = \frac{\operatorname{tgh}(\theta_{12}) + \operatorname{tgh}(\theta_{23})}{1 + \operatorname{tgh}(\theta_{12})\operatorname{tgh}\theta_{13})} = \frac{v_{12}+v_{23}}{1+v_{12}v_{23}}.$$

Recordemos que

$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y),$$
$$\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\operatorname{senh}(y),$$
$$\operatorname{tgh}(x+y) = \frac{\operatorname{tgh}(x)+\operatorname{tgh}(y)}{1+\operatorname{tgh}(x)\operatorname{tgh}(y)}.$$

Energía y masa relativista

- En Mecánica Clásica, a cada partícula de masa m se le puede asignar su energía cinética $E = mv^2/2$ y su momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$.
- Ese momento lineal de tres componentes no parece tener ningún significado intrínseco en un espacio-tiempo de 4-dimensiones.
- Debido a que la adición de velocidades funciona de forma diferente, en una colisión inelástica no se conservaría el momento lineal (véase https://gravitacion.es/cinematica-y-dinamica-relativista/ para más detalles).
- Tiene sentido considerar el cuadri-vector

$$e_0' = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v_x}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v_y}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v_z}{\sqrt{1-v^2}}\right),$$

- y entonces multiplicarlo por la masa m, obteniendo me_0'.
- Observemos que desarrollando la primera componente con la serie de Taylor:

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}m \equiv (1 + \frac{1}{2}v^2 + \ldots)m(\equiv mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \ldots)$$

- Esto sugiere que, salvo la constante mc^2, la primera componente de me_0' desempeña un papel análogo a la energía cinética clásica medida por O.

Energía y masa relativista

- Por tanto, podemos interpretar el vector temporal futuro me_0' como su energía-impulso.
- A toda partícula física se le asigna (experimentalmente) una constante $m \geq 0$, o masa en reposo.
- Si $m > 0$, a la partícula física se le llama material, en ausencia de cualquier fuerza, su trayectoria en el espaciotiempo físico es identificable a la de un observador no acelerado $\{P + se_0' : s \in \mathbb{R}\}$.
- Si $m = 0$, a la partícula se le llama luminosa, y su trayectoria en el espacio-tiempo es identificable a la trayectoria luminosa $\{P + su : s \in \mathbb{R}\}$ siendo u un vector luminoso.

Definición

Una partícula de masa $m > 0$ es una curva temporal $\rho : I \subseteq \mathbb{R} \to A$, con la normalización $\langle \rho', \rho' \rangle_1 = -m^2 (\equiv -m^2 c^2)$.

- A la velocidad $\rho'(s)$ le llamaremos energía-momento en el instante $s \in I$.
- En el caso de que la trayectoria de la partícula ρ sea una recta afín se dice que la partícula no está acelerada (o en caída libre), y su energía momento se considerará como un vector (constante) de V.

Energía y masa relativista

Definición

Un rayo de luz es cualquier recta afínmente parametrizada $\rho : I \subseteq \mathbb{R} \to A$ cuya velocidad ρ' sea luminosa y futura. Esta velocidad (identificable en todo instante $s \in I$ con un vector constante u de V) es su energía-momento.

Observemos que dado un sistema de referencia inercial, tenemos la descomposición $V = \langle e_0 \rangle_{\mathbb{R}} + e_0^{\perp}$ y, dada un partícula ρ, su impulso energía se descompone como

$$\rho'(s_0) = Ee_0 + \vec{P}, \quad \text{con } E = -\langle \rho'(s), e_0 \rangle_1 > 0,\ \vec{P} \in e_0^{\perp}.$$

Llamaremos a E la energía de ρ medida por O, a $\vec{P}$ el momento y al cociente $\vec{p} = m\vec{P}/E \in e_0^{\perp}$ el trimomento. Si $\vec{v}$ es la tri-velocidad que mide O de $\rho'(s_0)/m$, se tiene

$$E = m/\sqrt{1 - v^2}(\equiv mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}), \quad \vec{P} = E\vec{v}, \quad \vec{p} = m\vec{v}.$$

Conservación de la energía-momento

- La tercera Ley de Newton no es cierta en Relatividad Especial.
- Pero sí lo es una generalización, esto es, la conservación de la energía-momento:
  "la cantidad total de energía-momento de un sistema sin interacciones externas es constante".
- Además, cualquier observador medirá conservación tanto de energía como momento.
- Un buen ejemplo donde aplicar este principio puede ser el estudio de las colisiones totalmente inelásticas.

Conservación de la energía-momento

Proposición (Ley de conservación del momento)

Si tenemos r partículas con vectores energía-momento $P_1, \ldots, P_r$ y después de una colisión se generan s partículas con vectores energía-momento $\bar{P}_1, \ldots, \bar{P}_s$, se tiene que el momento total se conserva, esto es,

$$\sum_{i=1}^{r} P_i = \sum_{j=1}^{s} \bar{P}_j.$$

Como consecuencia, en una colisión inelástica donde dos partículas se fusionan en una, se tiene que

$$m^2 = m_1^2 + \frac{2m_1 m_2}{\sqrt{1-v^2}} + m_2^2,$$

siendo m la masa de la partícula única después de la colisión, m_1 y m_2 las de las partículas iniciales y v la velocidad relativa de las partículas que colisionan. Por tanto, $m > m_1 + m_1$.

¿Se puede viajar más rápido que la luz?

- Hay varios argumentos en contra.
- La ley de adición de velocidades sugiere que no es posible.
- La fórmula de la energía $E = m/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ parece indicar que hace falta una energía infinita para que un objeto masivo alcance la velocidad de la luz.
- Hasta el momento, todas las mediciones de partículas que se han realizado confirman que viajan a velocidades inferiores a la luz,
- incluso los neutrinos provenientes de supernovas.